



Тема: Показникова функція та її властивості

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення показникової функції, властивості показникової функції, навчитися будувати графіки показникової функції; засвоїти властивості степенів з дійсним показником на основі властивості степенів з раціональним показником;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати графіки показникової функції та користуючись побудованими графіками аналізувати властивості показникової функції;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук, показати, де саме застосовують у житті властивості показникової функції;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

Хід уроку

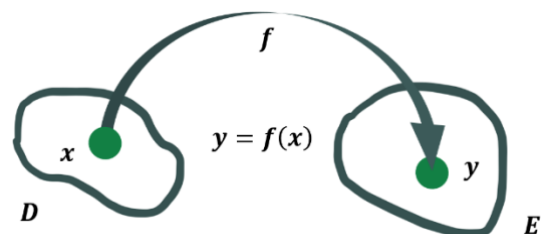
I. Організаційний етап

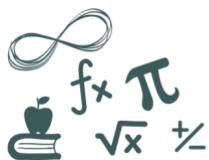
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Числовою функцією називається....

Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D (області визначення) ставиться у відповідність єдине число y .
 x – аргумент (незалежна змінна),
 y – функція (залежна змінна)
 f – функція
 $f(x_0)$ – значення функції f у точці x_0

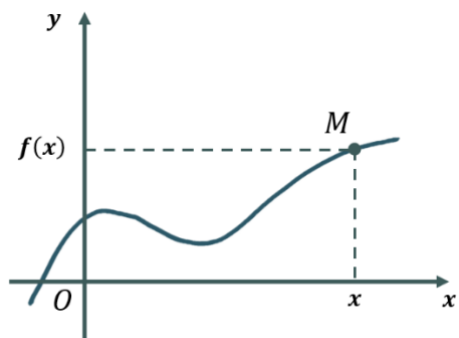




Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

Рівень стандарту



- Графіком функції називається...
Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$.
- Область визначення функції...
*Область визначення функції f – це множина тих значень, яких може набувати аргумент x .
Позначення: $D(f)$*

- Область значень функції...
Область значень функції f – це множина, яка складається із всіх чисел $f(x)$, де x належить області визначення. Її позначають $E(f)$.
- Функція зростаюча, якщо...
Функція $f(x)$ називається зростаючою на множині M , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції.
- Функція спадає, якщо...
Функція $f(x)$ називається спадною на множині M , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції.

- Які існують типи чисел?

Натуральні числа (лат. «natura» - природа)

Натуральні числа – числа, що виникають природним чином при лічбі.

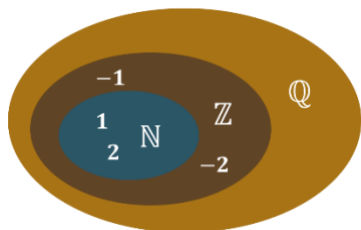
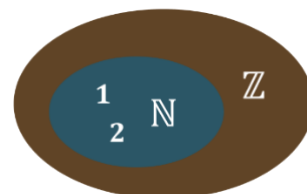


- Наведіть приклади натуральних чисел (1, 2, 3 ...)

Цілі числа

Цілі числа – це натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль.

- Наведіть приклади цілих чисел ($-2, -1, 0, 1, 2$)



Раціональні числа

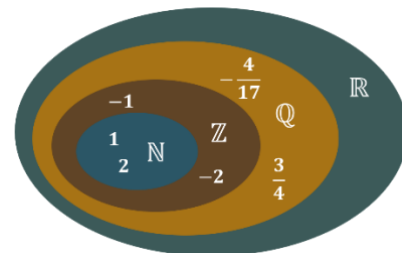
Раціональні числа – додатні числа (цілі та дробові), від'ємні числа (цілі та дробові), число нуль.

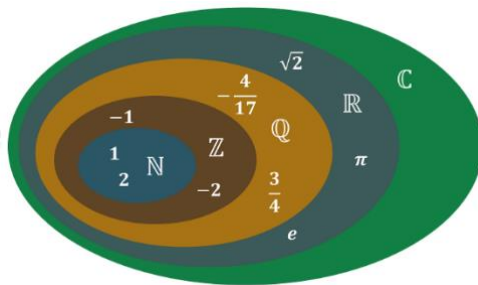
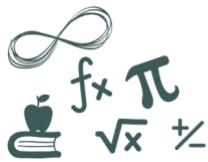
- Наведіть приклади раціональних чисел ($-\frac{4}{17}; \frac{3}{4}$)

Дійсні числа

Множина раціональних та ірраціональних чисел (числа, які не можуть бути виражені за допомогою відношення цілих чисел, їх можна виразити за допомогою нескінченних неперіодичних десяткових дробів)

- Наведіть приклади дійсних чисел ($\sqrt{2}, \pi, e$)





Комплексні числа

Комплексні числа можна подати у вигляді як формальну суму $x + iy$, x і y – дійсні числа, i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$)

➤ Наведіть приклади комплексних чисел ($1 + i\sqrt{3}$)

➤ Чи існують інші типи чисел?



Кватерніони й октоніони є прикладами гіперкомплексних чисел.

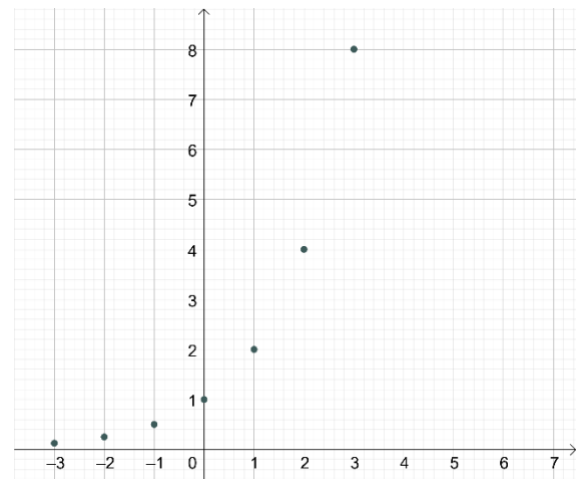
III. Вивчення нового матеріалу

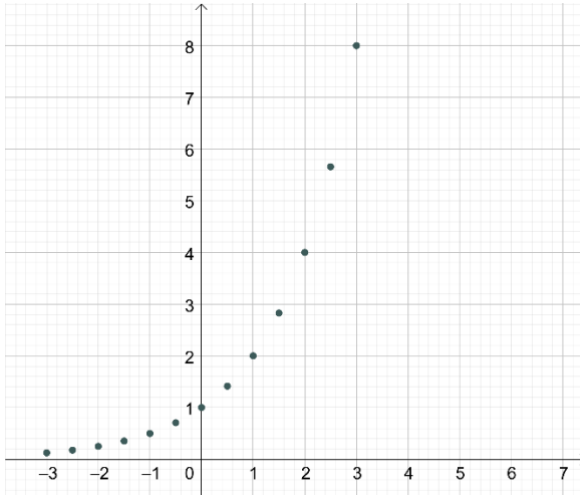
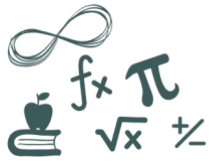
• Показникова функція

Функція виду $y = a^x$ $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ називається **показниковою**.

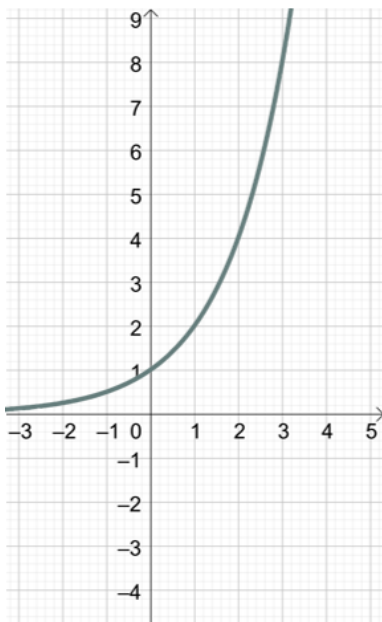
Наприклад: $y = 2^x$, $y = 0,3^x$, $y = (\sqrt{2})^x$

Побудуємо $y = 2^x$ для деяких цілих значень.





Тепер на цьому ж графіку побудуємо деякі дробові значення функції $y = 2^x$



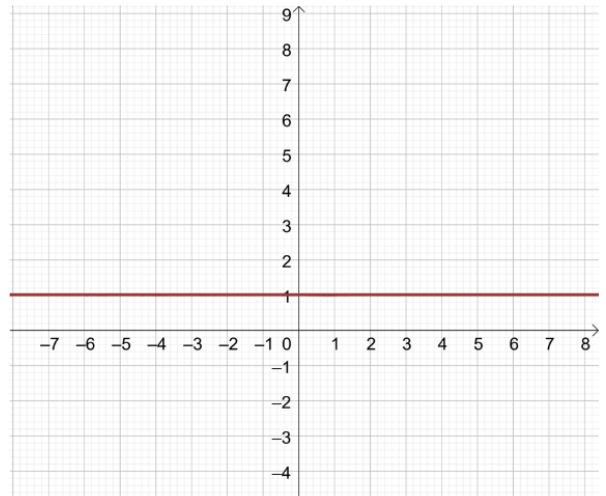
Якщо побудуємо всі значення з множини $x \in \mathbb{R}$, то отримаємо графік показникової функції $y = 2^x$ (можливий інший запис, наприклад: $g(x) = 2^x$).

**Кожна точка цього графіка є степенем числа 2 з дійсним показником x .*

- Чи існує функція при $a = 1$?



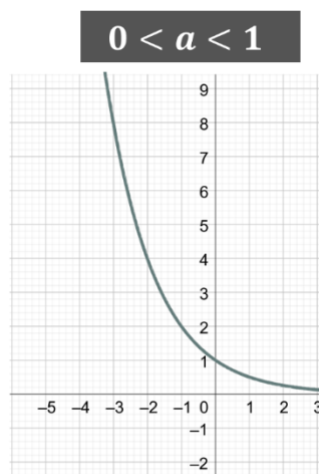
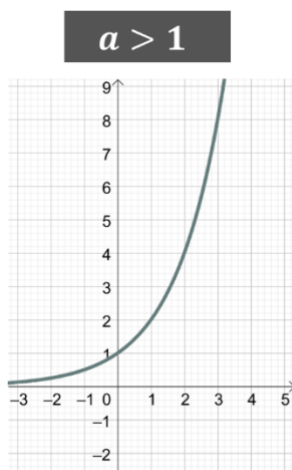
- Існує, але це вже буде не показникова функція. Графіком такої функції є пряма.



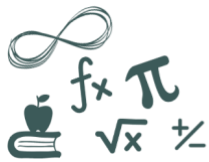
- Чи може отриманий графік показникової функції перетнути вісь абсцис?
- Ні, навіть якщо ми візьмемо від'ємний показник степеня, то завжди отримаємо додатне значення ($x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$)
Отже, **вісь x є асимптотою цього графіка.**

**Асимптота кривої (грец. ασυμπτωτος — що не збігається, не дотикається) — це пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько.*

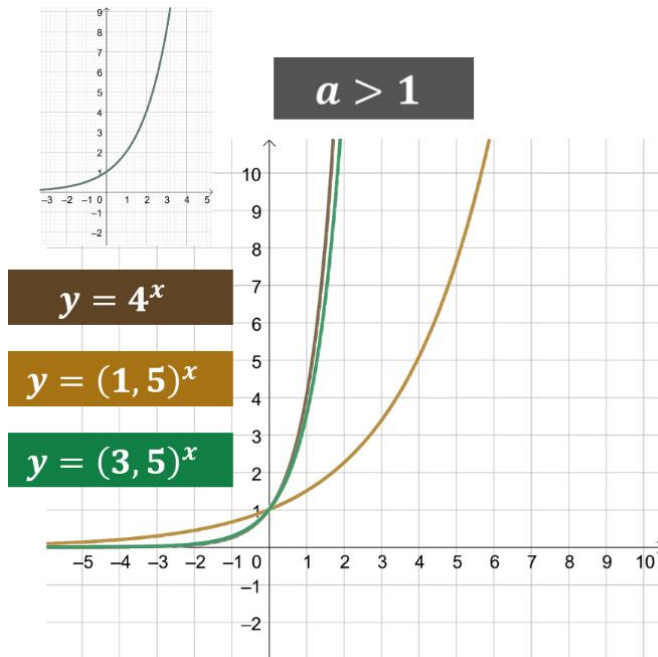
Проаналізуємо графіки показникової функції при $a > 1$ і $0 < a < 1$:



- Що можемо сказати про ці функції на перший погляд?
(при $a > 1$ функція зростаюча,
при $0 < a < 1$ функція спадна)

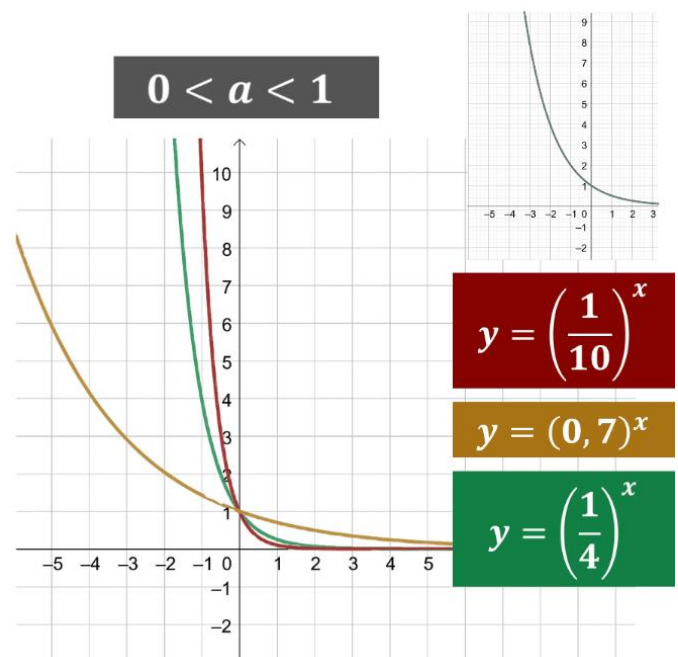


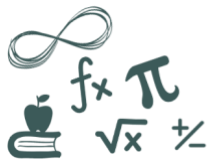
Побудуємо деякі графіки функцій $y = a^x$ при $a > 1$ і $0 < a < 1$



Чим більшою є основа $a > 1$, тим крутіше «піднімається» графік функції $y = a^x$, якщо рухатися вправо.

Чим меншою є основа $0 < a < 1$, тим крутіше «піднімається» графік функції $y = a^x$, якщо точка рухається вліво.





- Пригадаємо властивості степеня з раціональним показником.

$a^x a^y = a^{x+y}$
$a^x : a^y = a^{x-y}$
$(a^x)^y = a^{xy}$
$(ab)^x = a^x b^x$
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Всі ці властивості справедливі для $a > 0$, $b > 0$ та будь-яких дійсних x і y

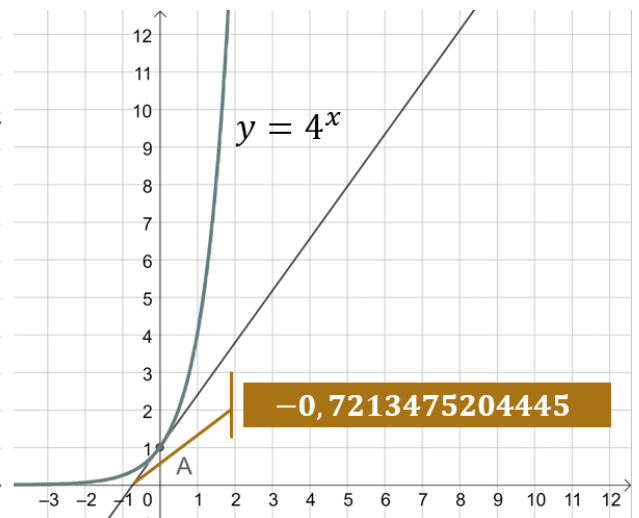
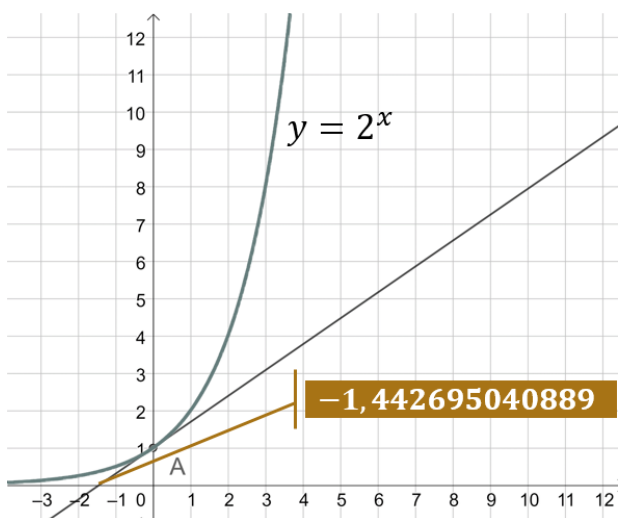
- **Властивості показникової функції**

1. $D(f) = \mathbb{R}$ (Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел)
2. $E(f) = (0; \infty)$ (Областю значень показникової функції є множина $(0; \infty)$)
3. $y > 0$ при всіх значеннях $x \in \mathbb{R}$ (Показникова функція немає нулів, і проміжок $(-\infty; +\infty)$ є проміжком її знакосталості)
4. При $a > 1$ зростаюча (При $a > 1$ зростає на всій області визначення)
При $0 < a < 1$ спадна (При $0 < a < 1$ спадає на всій області визначення)

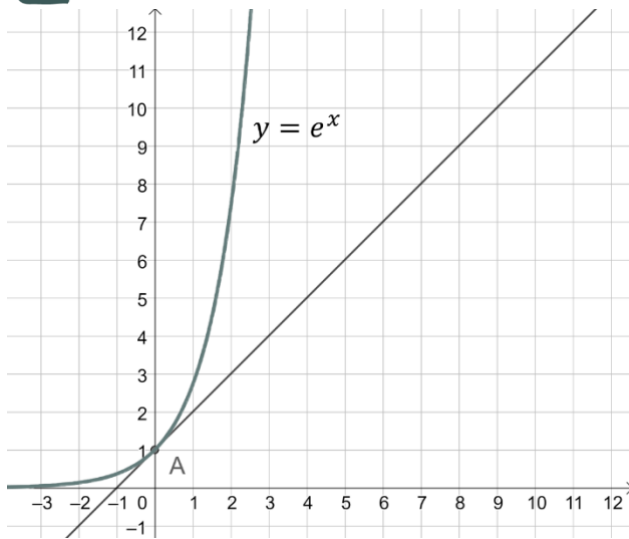
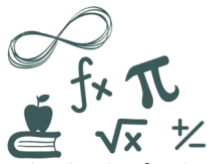
- **Цікаво**

Розглянемо графіки показникових функцій $y = 2^x$ і $y = 4^x$.

У них кутовий коефіцієнт дотичної проведеної в точці $A(0; 1)$ до графіка менший за одиницю або більший за одиницю.



- Чи існує така показникова функція, щоб кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в т. $A(1; 0)$ дорівнював 1?



Якщо за основу показникової функції взяти ірраціональне число $e = 2,71828 \dots$

Така показникова функція називається **експонентою**.

- Чому графік кожної показникової функції обов'язково проходить через точку $A(0; 1)$?

$$y = a^x \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow a^0 = 1$$

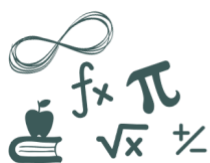
- Процеси, що описує показникова функція**

Показникова функція описує значну кількість процесів, що відбуваються в природі. Наприклад, зростання кількості бактерій за сприятливих для них умов існування можна описати за законом $N = 5^t$ (t – час дослідження, N – кількість бактерій у колонії).



- Як людина використовує ріст і розмноження бактерій? (Виробництво антибіотиків, кисломолочних продуктів, виноробство, медицина)

- Зростання кількості деревини можна порахувати за законом $A = A_0 \cdot a^{kt}$ (A_0 – початкова кількість деревини, A – кількість деревини через час t , k і a – сталі)



- Зменшення маси речовини під час радіоактивного розпаду відбувається за законом $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (M_0 – початкова маса речовини, M – маса в момент часу t , T – період напіврозпаду речовини (час розпаду половини атомів заданої речовини))
- Зменшення тиску повітря з висотою відбувається за законом $p = p_0 \cdot a^{-kh}$ (p_0 – тиск на рівні моря, p – тиск на висоті h , a і k – сталі)

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$	2) $y = \sqrt[6]{x}$
3) $y = 6^x$	4) $y = 6$

№2

Грунтуючись на які властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$	2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?
--	--

Відповідь: При $a > 1$ показникова функція є зростаючою, при $0 < a < 1$ – спадною.

№3

Побудуйте графік функції $y = 3^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

Розв'язок:

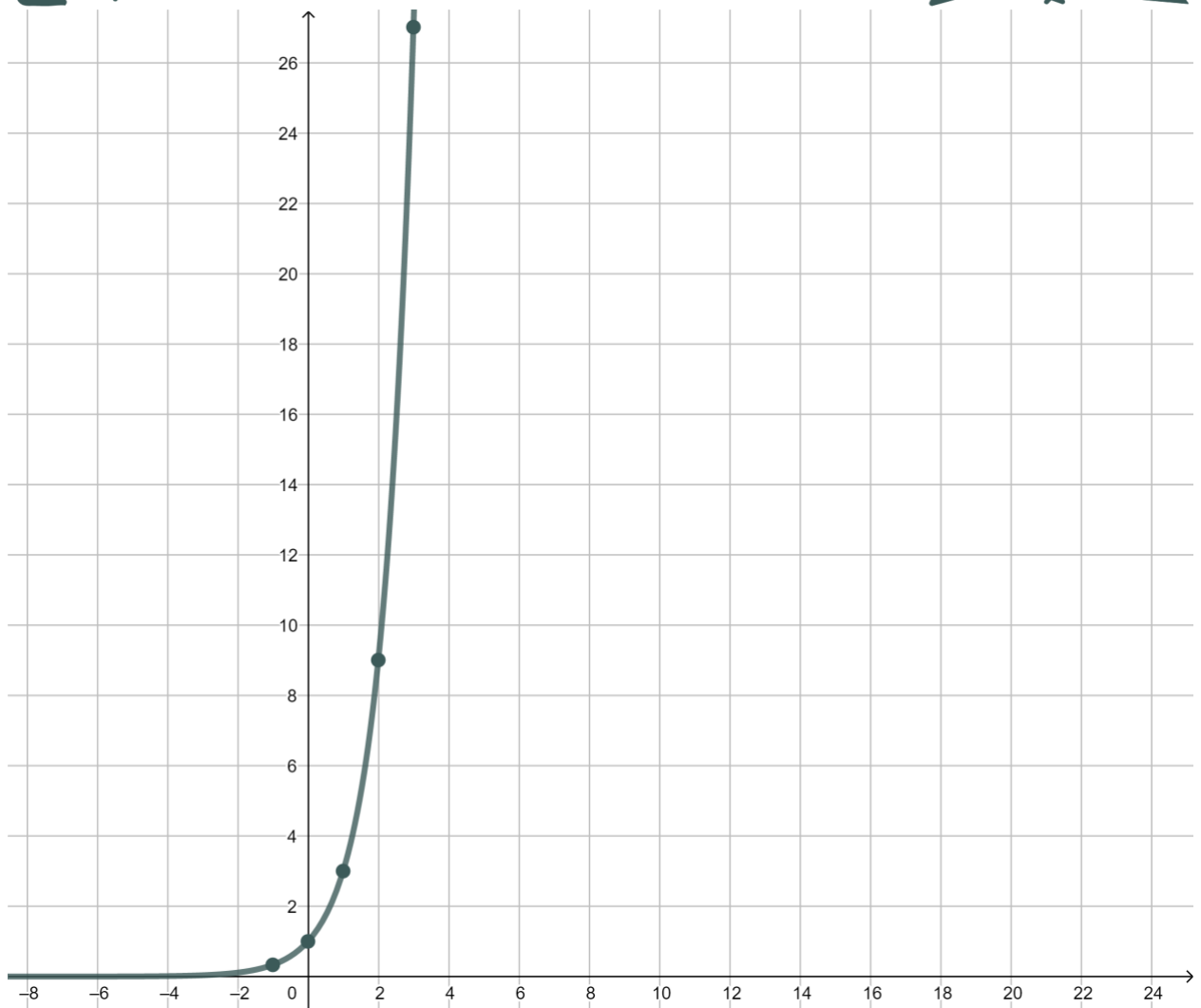
x	-1	0	1	2	3
3^x	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27



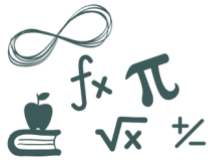
Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

Рівень стандарту



Відповідь: значення функції змінюється від $\frac{1}{3}$ до 27.



Порівняйте:

1) $5^{3,4} > 5^{3,26}$	2) $0,3^{0,4} < 0,3^{0,3}$	3) $\left(\frac{5}{4}\right)^0 < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$
4) $0,17^{-3} > 0,17^0$	5) $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}} < \sqrt{2}^{\sqrt{7}}$	6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$

№5

Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$

Розв'язок:

$$3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}+1} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^3 = 27$$

2) $\left((3^{\sqrt{7}})^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

Розв'язок:

$$\left((3^{\sqrt{7}})^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = (3^{\sqrt{7}})^3 = 3^3 + (3^{\sqrt{7}})^3 = 27 \cdot 7 = 189$$

3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$

Розв'язок:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}} &= \sqrt[3]{6^{5+2\sqrt{5}+1} \cdot 6^{-2\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^6} = 6^{\frac{6}{3}} \\ &= 6^2 = 36\end{aligned}$$

4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$

Розв'язок:

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{16}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$$



Чи є правильним твердження:

- 1) Найбільше значення функції $y = 0,2^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5;

Розв'язок:

$0 < 0,2 < 1 \Rightarrow$ функція $y = 0,2^x$ – спадна

На проміжку $[-1; 2]$ її найбільшим значенням буде $0,2^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$,
отже твердження правильне.

- 2) Областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;

Розв'язок:

Твердження правильне, за означенням показникової функції.

- 3) Областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$

Розв'язок:

6^x – додатне число за означенням $\Rightarrow 6^x + 5 > 5 \Rightarrow E(y) = (5; +\infty)$
Твердження не правильне.

- 4) Найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2; 2]$ дорівнює 16

Розв'язок:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$$

Твердження не правильне.

№7

На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а
найменше дорівнює $\frac{1}{4}$?

Розв'язок:

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

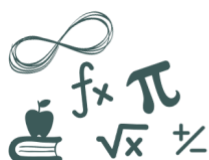
$$x = 4$$

$$2^x = \frac{1}{4}$$

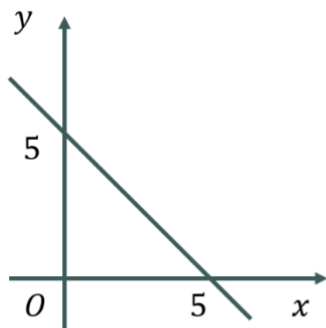
$$2^x = 2^{-2}$$

$$x = -2$$

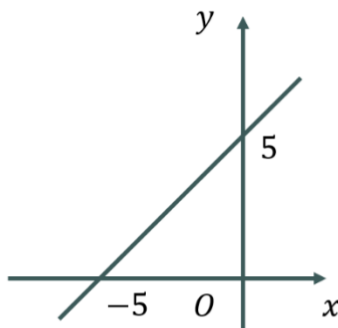
Відповідь: $[-2; 4]$



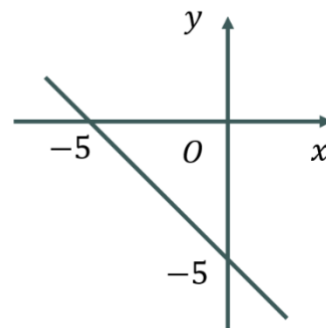
Графік якої з функцій, зображених на рисунках, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?



A)



Б)



B)

V. Підсумок уроку

- Яку функцію називають показниковою?
- Чи може показникова функція перетнути вісь абсцис?
- Які властивості має степінь з дійсним показником?
- Зобразіть схематично графік функції $y = a^x$ при $a > 1$; при $0 < a < 1$
- Через яку точку проходять всі графіки всіх показникових функцій?
- Користуючись побудованими графіками показникових функцій, охарактеризуйте всі їх властивості
- Що називають експонентою?
- Яку цікаву особливість має експонента?
- За якої умови показникова функція зростає? А за якої – спадає?
- Чи може значення показникової функції бути від'ємним?
- Чи може значення показникової функції дорівнювати нулю?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст. 6-9)

Виконати № 1.5; 1.7; 1.11; 1.17

Мерзляк А.Г.

Опрацювати §1

Виконати № 1,5; 1.7; 1.9; 1.21;

Істер О.С.

Опрацювати §1

Виконати № 1.2(2,4); 1.6(3-7); 1.7; 1.11(2);

Нелін Є.П.

Опрацювати §1

Виконати № 8; 23; 27(в); 31;

Бевз Г.П.